E.N.S.I. PHYSIQUE & MECANIQUE 1982

Programmes M et P MATHEMATIQUES APPLIQUEES (2 h)

NOTATIONS ET HYPOTHÈSES COMMUNES AUX PARTIES I ET II

— Si h est une fonction définie dans un voisinage de l'origine des réels, à valeurs réelles et si n est un entier positif, on écrira que $h(x) = o(x^n)$ s'il existe une fonction k définie dans un voisinage de l'origine des réels telle que

- $h(x) = k(x)\, x^n$
- $\lim_{x \to 0} k(x) = 0.$

— Soient L et M deux entiers positifs ou nuls.

— Soit f une fonction de variable réelle, à valeurs réelles, développable en série entière dans un voisinage de l'origine :

$$f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i\, x^i.$$

Un approximant de Padé [L, M] de f est une fonction rationnelle $[L, M] = \frac{P^{[L,M]}}{Q^{[L,M]}}$ où les polynômes définis par

$$P^{[L,M]}(x) = \sum_{i=0}^{L} p_i^{[L,M]} x^i$$

$$Q^{[L,M]}(x) = \sum_{i=0}^{M} q_i^{[L,M]} x^i$$

vérifient :

- $q_0^{[L,M]} = 1$
- $Q^{[L,M]}$ et $P^{[L,M]}$ sont premiers entre eux
- $Q^{[L,M]}(x) f(x) - P^{[L,M]}(x) = o(x^{L+M})$.

NOTATIONS ET HYPOTHÈSES SUPPLÉMENTAIRES POUR LA PARTIE II

— On suppose que f est une fonction qui admet un unique approximant de Padé [L, M] pour tout couple (L, M) d'entiers positifs ou nuls;

— On pose $a_i = 0$ pour tout entier i négatif;

— On note, pour L, M, n, et k éléments de $\mathbb{N}$:

$$* f_k(x) = \begin{cases} \sum_{i=0}^{k} a_i\, x^i & \text{si } k \geqslant 0, \\ 0 & \text{sinon;} \end{cases}$$

$$* \mathcal{Q}^{L,M}(x) = \begin{pmatrix} a_{L-M+1} & a_{L-M+2} & \cdots & a_L & a_{L+1} \\ a_{L-M+2} & a_{L-M+3} & \cdots & a_{L+1} & a_{L+2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_L & a_{L+1} & \cdots & a_{L+M-1} & a_{L+M} \\ x^M & x^{M-1} & \cdots & x & 1 \end{pmatrix}$$

$$Q^{L,M}(x) = \det\ \mathcal{Q}^{L,M}(x);$$

$$* \mathcal{P}^{L,M}(x) = \begin{pmatrix} a_{L-M+1} & a_{L-M+2} & \cdots & a_L & a_{L+1} \\ a_{L-M+2} & a_{L-M+3} & \cdots & a_{L+1} & a_{L+2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_L & a_{L+1} & \cdots & a_{L+M-1} & a_{L+M} \\ x^M f_{L-M}(x) & x^{M-1} f_{L-M+1}(x) & \cdots & x f_{L-1}(x) & f_L(x) \end{pmatrix}$$

$$P^{L,M}(x) = \det\ \mathcal{P}^{L,M}(x);$$

.../...

$$* \mathcal{R}_n^{L,M} = \begin{pmatrix} a_{L-M+1} & a_{L-M+2} & \cdots\cdots & a_L & a_{L+1} \\ a_{L-M+2} & a_{L-M+3} & \cdots\cdots & a_{L+1} & a_{L+2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_L & a_{L+1} & \cdots\cdots & a_{L+M-1} & a_{L+M} \\ a_{n-M} & a_{n-M+1} & \cdots\cdots & a_{n-1} & a_n \end{pmatrix}$$

$$R_n^{L,M} = \det \mathcal{R}_n^{L,M} ;$$

$$* \mathcal{C}^{L,M} = \begin{pmatrix} a_{L-M+1} & a_{L-M+2} & \cdots\cdots & a_{L-1} & a_L \\ a_{L-M+2} & a_{L-M+3} & \cdots\cdots & a_L & a_{L+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{L-1} & a_L & \cdots\cdots & a_{L+M-3} & a_{L+M-2} \\ a_L & a_{L+1} & \cdots\cdots & a_{L+M-2} & a_{L+M-1} \end{pmatrix}$$

Si $M > 0$, $C^{L,M} = \det \mathcal{C}^{L,M}$. Si M est nul, $C^{L,M} = 1$

QUESTIONS

PARTIE I

Dans cette partie, $f(x) = e^x$.

Question 1

Montrez, en le calculant, qu'il existe un unique approximant de Padé [L, M] de f pour :

(i) L entier positif ou nul et $M = 0$;

(ii) $L = M = 1$.

Question 2

Tracez dans un même repère orthonormé les graphes des restrictions à l'intervalle $[-1, 1]$ des fonctions f, [1,1] et [2,0].

Question 3

Soit y la solution de l'équation différentielle

$$\begin{cases} y'(t) = g(y(t)) \\ y(0) = 1, \end{cases}$$

où g est une fonction dérivable de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

Étant donné un nombre réel positif h, on se propose de calculer une valeur approchée y_n de $y(nh)$ pour $n \in \mathbb{N}$ de la façon suivante, R étant une fonction rationnelle :

$$\begin{cases} y_{n+1} = y_n + R(h\, g'(y_n))\, h\, g(y_n) \\ y_0 = 1. \end{cases}$$

Prenons $g(x) = -2x$.

Calculez, en indiquant les moyens de calcul dont vous disposez et les opérations que vous effectuez, les valeurs approchées de $y(nh)$ pour $0 \leqslant nh \leqslant 1$ dans les cas suivants :

- $h = \frac{1}{10}$, $\quad R(x) = [0,0](x)$;
- $h = \frac{1}{10}$, $\quad R(x) = [1,1](x)$.

A l'aide d'un tableau, présentez vos résultats en les comparant à la solution exacte.

.../...

PARTIE II

Question 4

(i) Montrez que $Q^{L,M}$ et $P^{L,M}$ sont des polynômes nuls ou de degré au plus M et L respectivement.

On note :
$$Q^{L,M}(x) = \sum_{n=0}^{M} q_n^{L,M}\, x^n$$

$$P^{L,M}(x) = \sum_{n=0}^{L} p_n^{L,M}\, x^n.$$

(ii) Montrez que les coefficients $q_n^{L,M}$ s'expriment en fonction de déterminants de matrices dont les termes sont des a_i $(i \in \mathbb{Z})$.

Montrez, en particulier, que :

$$q_0^{L,M} = C^{L,M}$$

$$q_M^{L,M} = (-1)^M\, C^{L+1,M}$$

(iii) Montrez que $p_0^{L,M} = a_0\, C^{L,M}$

$$p_L^{L,M} = (-1)^M\, C^{L,M+1}$$

Question 5

(i) Montrez que $R_n^{L,M} = 0$ si $L + 1 \leqslant n \leqslant L + M$

et que $R_{L+M+1}^{L,M} = C^{L+1,M+1}$.

(ii) Montrez que, pour tout n entier positif ou nul :

$$R_n^{L,M} = \sum_{p=0}^{M} q_p^{L,M}\, a_{n-p}.$$

(iii) Montrez que la fonction g définie par

$$g(x) = f(x)\quad Q^{L,M}(x)$$

est développable en série entière dans un voisinage de 0 et que :

$$f(x)\ Q^{L,M}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} R_n^{L,M}\, x^n.$$

(iv) A partir de (ii) et en justifiant que

$$f_{L-p}(x) = \sum_{n=0}^{L} a_{n-p}\, x^{n-p}$$

.../...

montrez que
$$\sum_{n=0}^{L} R_n^{L,M}\, x^n = P^{L,M}(x).$$

Question 6

(i) Montrez que $f(x)\ Q^{L,M}(x) - P^{L,M}(x) = \sum_{n=L+M+1}^{\infty} R_n^{L,M}\ x^n$

et en déduire que : $f(x)\ Q^{L,M}(x) - P^{L,M}(x) = o\ (x^{L+M})$.

(ii) Montrez que :

$$P^{L,M}(x)\ Q^{[L,M]}(x) - Q^{L,M}(x)\ P^{[L,M]}(x) = o\ (x^{L+M})$$

et que, si $Q^{(L,M)}$ n'est pas le polynôme nul :

$$[L,M] = \frac{P^{L,M}}{Q^{L,M}}.$$

L'identité de Sylvester qui suit sera admise.

Soit A une matrice à n lignes et n colonnes.

Soient i, j, k et l des entiers tels que :

$$1 \leqslant i < j \leqslant n\ ,\quad 1 \leqslant k < l \leqslant n.$$

Notons :

$A_{i,j;k,l}$ la matrice obtenue en supprimant dans A les lignes i et j et les colonnes k et l ;

$A_{i,k}$ la matrice obtenue en supprimant dans A la ligne i et la colonne k.

L'identité de Sylvester s'écrit alors :

$$\det A \det A_{i,j;k,l} = \det A_{i,k} \det A_{j,l} - \det A_{i,l} \det A_{j,k}.$$

Question 7

En appliquant l'identité de Sylvester à la matrice $\mathcal{Q}^{L,M+1}(x)$ avec $i = k = 1$ et $j = l = M + 2$, trouver une relation entre

$$C^{L+1,M}\ ,\quad C^{L,M+1}\ ,\quad C^{L+1,M+1}\ ,\quad Q^{L,M+1}(x)\ ,\quad Q^{L+1,M}(x) \quad \text{et} \quad Q^{L,M}(x).$$

On admettra l'identité suivante :

$$C^{L+1,M}\ P^{L,M+1}(x) = C^{L,M+1}\ P^{L+1,M}(x) - C^{L+1,M+1} x\ P^{L,M}(x).$$

Question 8

(i) Déduire des questions 4 et 7 que si $q_M^{L,M}$ est non nul, la connaissance de $Q^{L,M}$, $P^{L,M}$, $Q^{L+1,M}$ et $P^{L+1,M}$ permet d'obtenir $Q^{L,M+1}$ et $P^{L,M+1}$.

(ii) A l'aide de ce qui précède, trouver l'approximant [1, 2] de la fonction $f(x) = e^x$.

-FIN-

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail